

**Cours FONCTIONS PRIMITIVES**

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC SM BIOF

**FONCTIONS PRIMITIVES****I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION****1) Activités : Activité1**

1) Déterminer une fonction  $F$  qui admet pour fonction dérivée la fonction :  $f(x) = x^2 + 2x + 3$

2) existe-t-il une autre fonction  $G$  tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = f(x) ?$$

3) combien Ya t'ils de onction  $H$  tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); H'(x) = f(x) ?$$

et donner une expression de toutes les fonctions primitives de  $h$

**Remarques :** 1) la fonction  $F$  tel que :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \text{ Est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et}$$

$$\text{Et on a } (\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$$

On dira que :  $F$  est une primitive de  $f$

2) Soit  $G$  une fonction définie sur

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 2 \text{ on a aussi : } G \text{ est dérivable}$$

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = f(x)$$

$G$  est aussi une primitive de  $f$

3) toute fonction  $H$  de la forme :

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ aussi une}$$

primitive de  $f$

**Activité2 :** Soient  $F$  une fonction primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  c'est-à-dire

$$(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$$

et  $G$  une fonction primitive de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $I$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels.

1- Montrer que  $(\alpha F + \beta G)$  est une fonction primitive de la fonction  $(\alpha f + \beta g)$  sur  $I$ .

2- Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux fonctions primitives de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ ; Montrer que :

$$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$$

où  $\lambda$  est un réel quelconque.

3- Démontrer que si  $f$  admet une fonction

primitive sur  $I$  et  $x_0 \in I$ ; alors il existe une unique

fonction  $F_0$  fonction Primitive de  $f$  telle que

$$F_0(x_0) = y_0 \text{ où } y_0 \text{ un réel quelconque.}$$

**2) Définition et propriétés**

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ; On dit que la fonction  $F$  est une fonction primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  si : 1)  $F$  est dérivable sur  $I$

$$2) (\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$$

**Théorème :(admis)**

Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f$  admet une fonction primitive sur  $I$

**Remarque :** La continuité dans le théorème précédent est une condition suffisante qui n'est pas nécessaire.

**Propriété :** Si  $f$  admet une fonction primitive  $F$  sur  $I$  alors toutes les fonctions primitives de  $f$  sur  $I$  s'écrivent de la forme :  $F + \lambda$  où  $\lambda$  est un réel.

**Propriété :** Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux fonction primitive d'une fonction  $f$  sur  $I$  alors :

$$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = 2x + 1 \text{ si } x \leq 1$$

$$f(x) = 2x - 1 \text{ si } x > 1$$

Montrer que la fonction  $f$  n'admet pas de primitive sur  $\mathbb{R}$

**Solution :** On remarque que  $f$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ ; (elle n'est pas continue en 1)

$$\text{en effet : } f(1) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq f(1)$$

$F_1(x) = x^2 + x + k_1$  est une fonction primitive de la fonction  $f$  sur  $] - \infty, 1[$ .

$F_2(x) = x^2 - x + k_2$  est une fonction primitive de la fonction  $f$  sur  $]1, +\infty[$ .

Si  $f$  admet une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$  alors ils existent  $k_1$  et  $k_2$  tels que :

$$\begin{cases} F_1(x) = x^2 + x + k_1; \text{ si } \dots x \leq 1 \\ F_2(x) = x^2 - x + k_2; \text{ si } \dots x > 1 \end{cases}$$

et que  $F$  soit dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$$

On a  $F$  est dérivable sur  $]-\infty, 1[$

et  $(\forall x \in ]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$

et  $F$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$

et  $(\forall x \in ]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$

Le problème il faut déterminer (s'ils existent)

$k_1$  et  $k_2$  dans  $\mathbb{R}$  pour que  $F$  soit dérivable en 1 et

que :  $F'(1) = f(1) = 3$ .

On a  $F(1) = 2 + k_1$

D'autre part pour que  $f$  soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$$

On en déduit que  $2 + k_1 = k_2$  d'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + k_2 - 2 - k_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + k_2 - k_1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + 2 + k_1 - k_1}{x - 1}$$

Car :  $2 + k_1 = k_2$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 = F'_d(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + k_1 - 2 - k_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 2 = 3 = F'_g(1)$$

Donc pour tous réels  $k_1$  et  $k_2$  ;  $F'_d(1) \neq F'_g(1)$

D'où  $F$  n'existe pas et par suite  $f$  n'admet pas de primitive sur  $\mathbb{R}$

**Propriété :** Si  $f$  admet une fonction primitive sur  $I$

et  $x_0 \in I$ ; alors il existe une unique fonction  $F_0$

fonction Primitive de  $f$  telle que  $F_0(x_0) = y_0$  où

$y_0$  un réel quelconque.

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

1) Déterminer les fonctions primitives de la

fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$

2) Déterminer la fonction primitive de la fonction  $f$

sur  $]0; +\infty[$  tel que :  $F(1) = 3$

**Solution :** 1)  $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

$$\text{Donc : } F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^{2+1} + \frac{1}{2} x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$2) F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k = 3$$

$$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 1 + k = 3 \Leftrightarrow \frac{7}{6} + k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{11}{6}$$

Donc : la fonction primitive de la fonction  $f$  sur

$]0; +\infty[$  tel que :  $F(1) = 3$  est :

$$F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$$

**Propriété :** Si  $F$  est une fonction primitive de la

fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  et  $G$  une fonction

primitive de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $I$  et  $\alpha$  un

réel alors :

1)  $(F + G)$  est une fonction primitive de la fonction  $(f + g)$  sur  $I$

2)  $(\alpha F)$  est une fonction primitive de la fonction  $(\alpha f)$  sur  $I$

### 3) Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\alpha x + c$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ )	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r$ ( $r \in \mathbb{Q}/\{-1\}$ )	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times \arctan(x) + c$

#### 4) Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u' u^n (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'^n \sqrt{u} (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u' u^r (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'$ ou	$v' u + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u) + C$

La ligne en couleur jaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

#### 5) Application :

**Exercice1** (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$  2)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

3)  $f(x) = \sin x + x \cos x$  4)  $f(x) = (2x-1)^3$

5)  $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$  6)  $f(x) = 5x\sqrt[3]{3x^2+1}$

7)  $f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$  8)  $f(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3)$

**Solutions : 1)**  $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$

$F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 1x + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

2)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

$F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

3)  $f(x) = \sin x + x \cos x = x' \sin x + x(\sin x)'$

Donc :  $F(x) = x \times \sin x + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

4)  $f(x) = (2x-1)^3 = \frac{1}{2} (2x-1)' (2x-1)^3$

$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} (2x-1)^{3+1} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

$F(x) = \frac{1}{8} (2x-1)^4 + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

5)  $f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2}$

on doit remarquer que :  $f(x) = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

et par suite :  $F(x) = \frac{1}{x^2-1} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

6)  $f(x) = 5x\sqrt[3]{3x^2+1}$  On doit remarquer que :

la fonction  $u(x) = 3x^2 + 1$  donne  $u'(x) = 6x$  et par

suite :  $f(x) = \frac{5}{6} u'(x) \sqrt[3]{u(x)}$  on utilisant le tableau

on a :

(c'est de la forme :  $u'^n \sqrt[n]{u}$  ( $n = 3$ ))

Donc les fonctions primitives de  $f$  s'écrivent sous

la forme :  $F(x) = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \sqrt[3]{u^4(x)} + k$

$F(x) = \frac{5}{8} \sqrt[3]{(3x^2+1)^4} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

7) Déterminons une fonction primitive de :

$f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$  On doit remarquer que :

la fonction  $u(x) = 2x^2 + x$  donne  $u'(x) = 4x + 1$

et par suite :  $f(x) = \frac{u'(x)}{u^4(x)} = u'(x) u^{-4}(x)$

on utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme :  $u' u^n$  ( $n = -4$ ))

Donc les fonctions primitives de  $f$  s'écrivent sous

la forme :  $F(x) = \frac{1}{-4+1} u^{-4+1}(x) + k$

$$F(x) = -\frac{1}{3}(2x^2 + x)^{-3} + k = -\frac{1}{3} \frac{1}{(2x^2 + x)^3} + k$$

8)  $f(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3)$

On doit remarquer que :

la fonction  $u(x) = \pi x^2 + 3$  donne  $u'(x) = 2\pi x$

et par suite :  $f(x) = \frac{7}{2\pi} u'(x) \cos(u(x))$

(c'est de la forme :  $u' \times (v \circ u)$ )

Donc les fonctions primitives de  $f$  s'écrivent sous

la forme :  $F(x) = \frac{7}{2\pi} \sin(\pi x^2 + 3) + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

**Exercice2 (situation indirecte):** Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 4}$  2)  $f(x) = \frac{6}{x^2 + x + 1}$

**Solutions :** 1)  $f(x) = \frac{2}{x^2 + 2x + 4}$

il faut faire des transformations :

A remarquer que  $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2 + 3}$

Ce que nous laisse penser à la fonction *arctan*

$$f(x) = \frac{2}{3 \left( \left( \frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)'}{\left( \frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1}$$

(C'est de la forme :  $\frac{u'}{(u)^2 + 1}$ )

Donc les fonctions primitives de la fonction  $f$  sont les fonctions

$$F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

2)  $f(x) = \frac{6}{x^2 + x + 1}$

A remarquer que  $f(x) = \frac{6}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

$$f(x) = \frac{6}{\frac{3}{4} \left( \frac{4}{3} \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right)} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\left( \frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)'}{\left( \frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1}$$

(C'est de la forme :  $\frac{u'}{(u)^2 + 1}$ )

Donc les fonctions primitives de la fonction  $f$  sont

les fonctions :  $F(x) = 4\sqrt{3} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + k$  avec

$k \in \mathbb{R}$

**Remarque :** On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$$f(x) = \frac{\alpha}{ax^2 + bx + c} \text{ où le discriminant } \Delta \text{ est}$$

strictement négatif.

**Exercice3** (Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \frac{2}{4x^2 + 4x + 1}$  2)  $f(x) = \frac{6}{x^2 + x + 1}$

**Solutions :** 1) A remarquer que

$$f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2} = (-3) \left( -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} \right) \text{ (C'est de la forme: } -\frac{u'}{u^2} \text{)}$$

Donc les fonctions primitives de la fonction  $f$  sont

les fonctions :  $F(x) = \frac{-3}{2x+1} + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

**Remarque :** On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$$f(x) = \frac{\alpha}{ax^2 + bx + c} \text{ où le discriminant } \Delta \text{ est nul}$$

**Exercice4 :** Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

1)  $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}$  2)  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2 + \cos x}}$

3)  $f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$       4)  $f(x) = (4x+5)^2$

5)  $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$       6)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

7)  $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$       8)  $f(x) = \tan^2 x$

9)  $f(x) = \cos^4 x$  (utiliser :  $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$ )

10)  $f(x) = \sin^3 x$  (Remarquer que :  $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x$ )

**Solutions :** 1) il faut faire des transformations :  
a remarquer que :

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+1} = \frac{x^2+1+4}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+1} = 1 + 4 \frac{1}{x^2+1}$$

Ce que nous laisse penser à la fonction *arctan*

(C'est de la forme :  $\frac{1}{x^2+1}$ )

Donc les fonctions primitives de la fonction *f* sont

les fonctions :  $F(x) = x + 4 \arctan x + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

2)  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2+\cos x}} = -(2+\cos x)' (2+\cos x)^{-\frac{1}{3}}$

(c'est de la forme :  $u'u^n$ )

Donc les fonctions primitives de *f* s'écrivent sous la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{3}+1} (2+\cos x)^{-\frac{1}{3}+1} + k = -\frac{3}{2} (2+\cos x)^{\frac{2}{3}} + k$$

$$F(x) = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{(2+\cos x)^2} + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

3)  $f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$

Donc :  $F(x) = x^2 \times \sin x + k$  avec  $k \in \mathbb{R}$

4)  $f(x) = (4x+5)^2 = \frac{1}{4} (4x+5)' (4x+5)^2$

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1} (4x+5)^{2+1} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{12} (4x+5)^3 + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

5)  $f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

Donc :  $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$F(x) = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2x+1})^3 + k$$

6)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

7)  $f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

8)  $f(x) = \tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$

$$F(x) = \tan x - x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

9)  $f(x) = \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$$f(x) = \frac{1}{4} (1+2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4} \left(1+2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{8} (3+4\cos 2x + \cos 4x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

10)  $f(x) = \sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x = \sin x \times (1-\cos^2 x)$

$$f(x) = \sin x - \sin x \times \cos^2 x = \sin x + (\cos x)' \times \cos^2 x$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

**Exercice5:** Soit la fonction *f* définie sur  $[0; +\infty[$

par :  $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

1) Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

2) Déterminer la fonction primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$  tel que :  $F(1) = \frac{5}{2}$

**Solution :1)**

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + b}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax + a + b}{(x+1)^2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a=1 \\ 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \text{ donc : } f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$2) f(x) = 1 - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \text{ Donc : } F(x) = x + \frac{1}{x+1} + k$$

$$k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

**Exercice6:** Soit la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = x\sqrt{x-1}$$

1) montrer que :  $f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \quad \forall x \in [1; +\infty[$

2) Déterminer la fonction primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $[1; +\infty[$  tel que :  $F(2) = 1$

**Solution :1)**  $\forall x \in [1; +\infty[$

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2} \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = |x-1| \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$$

On a :  $x \in [1; +\infty[$  donc :  $x \geq 1$  donc :  $x-1 \geq 0$

donc :

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = (x-1) \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1} - 1\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1}$$

$$2) f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

$$f(x) = \left( (x-1)^3 \right)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (x-1)' (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)' (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} (x-1)^{\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x-1)^{\frac{1}{2}+1} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{x-1})^3 + k \quad k \in \mathbb{R}$$

**Exercice7:** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{5x^4 + 40x^2 + 20x + 80}{(x^2 + 4)^2}$$

1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  et  $c$  tels que :

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2) Déterminer la fonctions primitives  $F$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  tel que :  $F(0) = c$

**Solution :1)**

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c = \frac{ax+b+c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2} = \frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{(x^2+4)^2}$$

$$f(x) = \frac{cx^4 + 8cx^2 + ax + (b+16c)}{(x^2+4)^2} \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} c=5 \\ 8c=40 \\ a=20 \\ b+16c=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ c=5 \\ a=20 \\ b=0 \end{cases} \text{ donc : } f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5$$

$$2) f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5 \Leftrightarrow f(x) = 10 \frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} + 5$$

$$\text{Donc : } F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = 5 \Leftrightarrow -\frac{10}{4} + k = 5 \Leftrightarrow k = \frac{15}{2}$$

$$F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + \frac{15}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices  
Que l'on devient un mathématicien

